

# 1

## Il rumore di fase

Gli oscillatori sono componenti essenziali nei sistemi elettronici per le telecomunicazioni: nei trasmettitori e nei ricevitori RF forniscono ai mixer il segnale che permette la conversione di frequenza, nei sistemi digitali generano il segnale di clock per sincronizzare le operazioni.

Un oscillatore ideale dovrebbe fornire segnali perfettamente periodici e quindi un preciso riferimento temporale; purtroppo però, i sistemi elettronici sono sedi di disturbi indesiderati, che rendono i segnali generati non più perfettamente periodici; tipici sono: il rumore termico, il rumore nel substrato degli IC, il rumore nell'alimentazione, ecc. Conseguenze di tali non idealità sono, nei ricevitori RF, una ridotta immunità alle interferenze adiacenti al canale desiderato e, nei sistemi digitali, la diminuzione del margine di rumore. E' quindi di cruciale importanza caratterizzare il modo in cui le perturbazioni agiscono sugli oscillatori causando instabilità temporale (timing jitter) e dispersione spettrale (PSD), cioè rumore di fase. Il rumore di fase consiste nelle fluttuazioni aleatorie indesiderate che, inevitabilmente, perturbano la linearità dell'andamento temporale della fase di un segnale sinusoidale generato da una sorgente reale.

L'avvento delle nuove tecnologie di trasmissione digitale ha sempre più accentuato la necessità di un'accurata misura del rumore di fase, fattore indispensabile per caratterizzare la qualità del segnale. E' infatti noto che il rumore di fase è responsabile di effetti quali la limitazione del range operativo di un radar, del degrado della qualità di una immagine televisiva, del limite di precisione del posizionamento satellitare e della scarsa qualità di una trasmissione dati. La misura del rumore di fase si pone come obiettivo la stima della sua densità spettrale di

potenza oppure la ricostruzione del suo andamento temporale. In particolare, la densità spettrale fornisce informazioni significative per lo studio del comportamento di generatori di segnale o amplificatori, mentre per l'analisi della stabilità di un riferimento di tempo o frequenza risulta più conveniente considerare parametri che esprimono fondamentalmente previsioni sulle deviazioni del tempo e della frequenza, su una certa scala temporale. Le più avanzate ed accurate tecniche di misura per il rumore di fase ricorrono a sistemi specializzati, che confrontano, tramite un rivelatore di fase, il segnale sinusoidale generato dalla sorgente analizzata con un segnale di riferimento molto più stabile.

Invece di ricorrere a sistemi dedicati, si utilizza talvolta l'analizzatore di spettro, visualizzando lo spettro della portante ed osservando quanto la modulazione di fase indesiderata diffonde sull'asse delle frequenze la potenza della stessa portante. La ricerca di una soluzione alternativa a quelle già esistenti ha fortemente motivato questo lavoro di tesi. Il metodo di misura proposto in tale lavoro prevede l'elaborazione numerica della sequenza dei campioni rappresentativi di forme d'onda sinusoidali affette da rumore di fase.

## 1.1 Modello descrittivo del rumore di fase

La natura del rumore di fase non può essere ricondotta ad un unico meccanismo fisico, come per il caso del rumore termico nei conduttori o del rumore di tipo “shot” nelle giunzioni a semiconduttore. In verità, il rumore di fase che caratterizza un sistema reale è il risultato complessivo della sovrapposizione di più contributi specifici di diverse sorgenti di rumore presenti all’interno del sistema; di conseguenza le caratteristiche spettrali che esso esibisce non possono generalmente essere descritte con un unico modello. L’adozione di un particolare modello descrittivo si basa su una scelta di compromesso tra semplicità ed accuratezza del modello stesso. Infatti, un modello della realtà comprensivo dei fenomeni di rumore risulterebbe eccessivamente complesso. I fenomeni di rumore evidenziano perciò la distanza che separa la realtà dai modelli astratti comunemente utilizzati per descriverla.

In fase di progettazione, il problema è analizzato definendo un modello relativamente semplice per descrivere la sorgente del segnale utile e considerando separatamente il caso del rumore, riguardato come un segnale indesiderato generato da una seconda sorgente fittizia coesistente che non può essere in alcun modo disattivata. Il segnale reale è rappresentato quindi utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, cioè come somma del segnale utile e di quello indesiderato. Lo sviluppo del progetto è, a questo punto, subordinato alle conoscenze che si hanno sulla sorgente di rumore. Lo studio delle sorgenti di rumore richiede conoscenze fisiche robuste, coinvolgendo questioni riguardanti la meccanica statistica e la meccanica dei quanti ed adotta l’approccio probabilistico proprio di tali discipline. I risultati ottenuti per via teorica esprimono le caratteristiche statistiche del segnale rumore: stazionarietà, ergodicità, funzione di densità di probabilità per l’ampiezza del segnale, potenza del segnale e sua distribuzione in frequenza, ecc. In moltissimi casi, in assenza di un adeguato modello teorico, tali informazioni sono reperite per via sperimentale, vale a dire attraverso misure. Il problema delle misure su segnali aleatori, quali il rumore, è

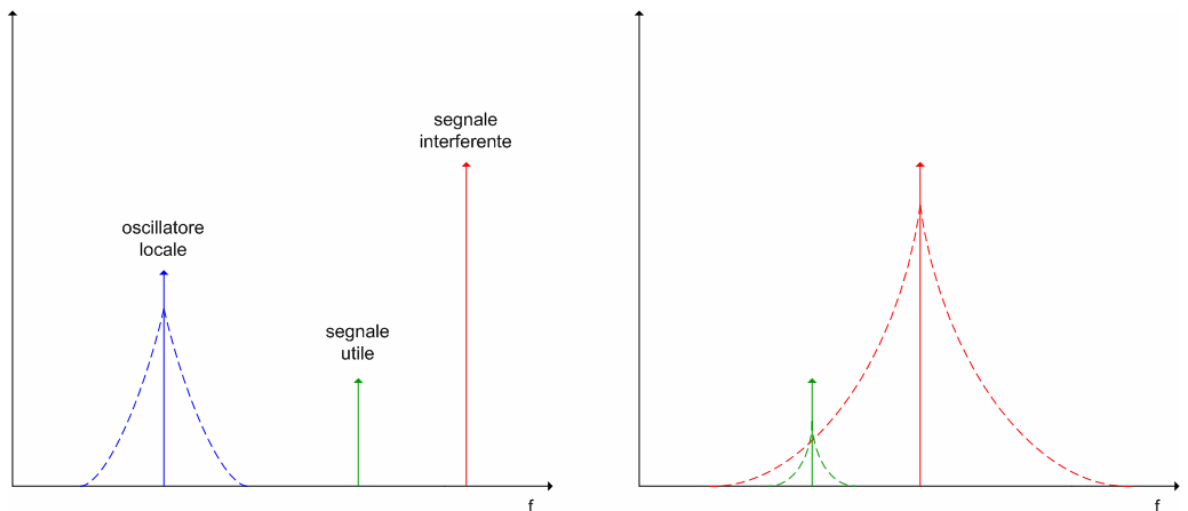
ostico e anche abbastanza insolito; infatti, esso adotta concetti inerenti l'analisi statistica in modo sostanziale, mentre un operatore, quando esegue una misura, è abituato a fare un uso "di seconda mano" degli strumenti della statistica per valutare, per esempio, l'incertezza sui risultati di misurazioni di grandezze deterministiche.

## **1.2 Finalità delle misurazioni del rumore di fase**

Nella pratica, tutte le sorgenti di frequenza sono caratterizzate da un'indesiderata modulazione di fase (o di frequenza) dovuta ad un rumore interno alla sorgente. Naturalmente questo rappresenta un grave inconveniente in tutte quelle applicazioni in cui si richiede un segnale periodico molto stabile nel tempo. Per esempio, la regolarità dei passaggi per lo zero di un segnale sinusoidale, che occorrono quando il segnale ha la massima pendenza, è inficiata dal rumore di fase in misura preponderante rispetto al rumore d'ampiezza. In altri termini, il rumore di fase origina il jitter dei segnali periodici adoperati praticamente in tutte le applicazioni che richiedono una temporizzazione.

Il rumore di fase è responsabile della degradazione delle immagini televisive, limita la precisione di posizionamento dei satelliti, inficia l'accuratezza delle operazioni di conversione in frequenza. Inoltre è il principale fattore limitante la qualità di un canale di comunicazione; non è possibile, infatti, trascurare la presenza del rumore di fase sia nelle trasmissioni analogiche che utilizzano una modulazione angolare, sia nelle trasmissioni digitali che utilizzano una segnalazione binaria. Nelle prime esso degrada il rapporto segnale-rumore, nelle seconde oltre ad affliggere la stabilità della portante è responsabile anche del jitter nella segnalazione che codifica l'informazione, alterando la durata del simbolo e incrementando la probabilità d'errore per bit (BER). Per comprendere più a fondo l'importanza del rumore di fase nei sistemi di comunicazione si consideri un generico transceiver (un sistema ricevitore-trasmettitore) che realizza tipicamente una down-conversion del

segnale ricevuto, lo amplifica e lo ritrasmette con una up-conversion, in generale su un diverso canale. Se l'oscillatore locale è affetto da rumore di fase, sia il segnale convertito verso il basso che quello verso l'alto sono degradati dal rumore. Il segnale ricevuto tipicamente è di bassa potenza a causa dell'attenuazione subita dal cammino percorso, mentre il segnale che si va a trasmettere ha una potenza di gran lunga maggiore e figura come un segnale d'interferenza presente in un canale adiacente. Si verifica allora un fenomeno che prende il nome di "reciprocal mixing" e che si presenta in tutte le situazioni in cui si vuole recuperare un segnale debole quando in un canale adiacente è presente un segnale d'interferenza ad elevata potenza (figura 1.1).



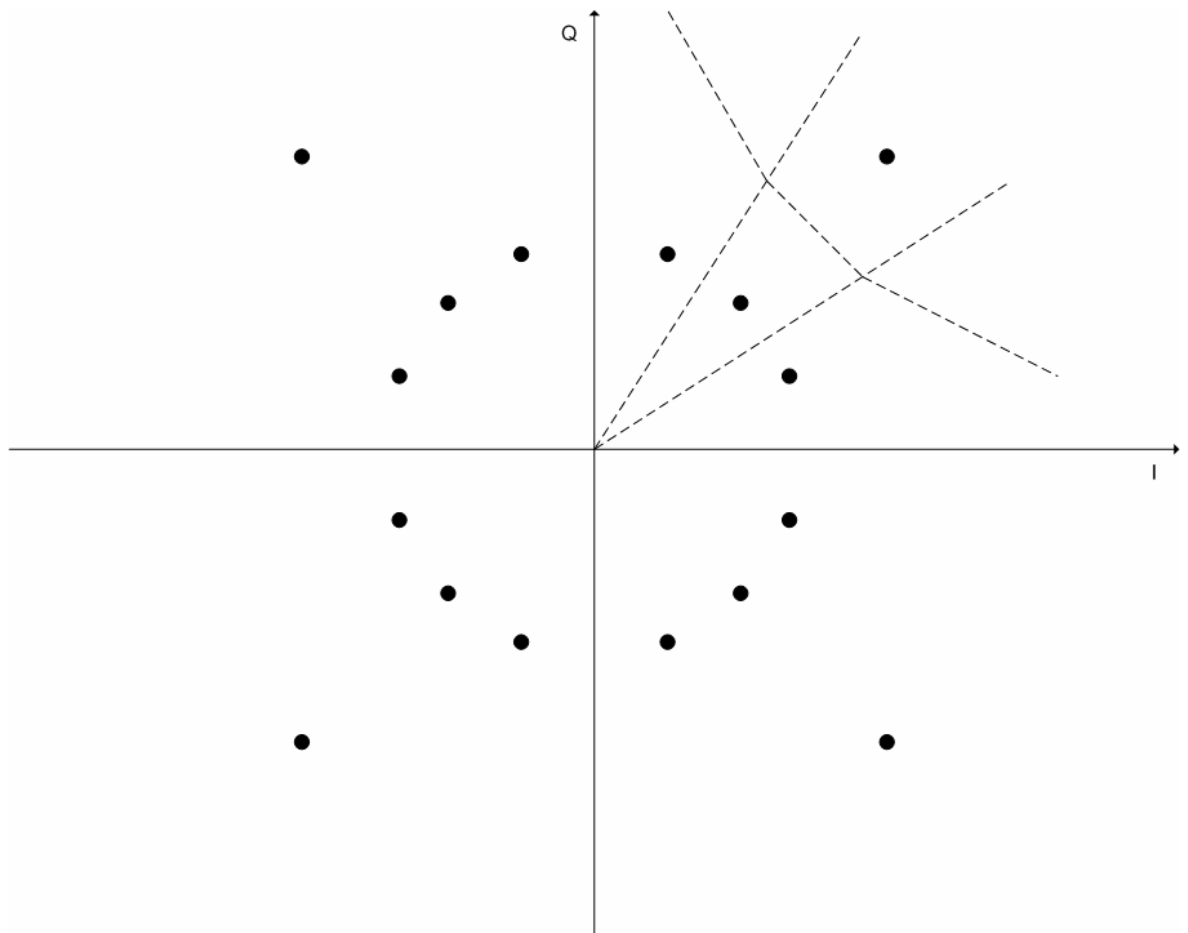
**Fig. 1.1 – Effetti del “reciprocal mixing” di un transceiver**

Il segnale debole desiderato resta inevitabilmente degradato dalle bande laterali del tono interferente generate dal rumore di fase dell'oscillatore locale. Il problema è sentito ad esempio nel mondo della telefonia cellulare laddove le frequenze utilizzate figurano intorno a 900 MHz o 1.8GHz e tra un canale e l'altro ci sono soltanto poche decine di kHz. Nel sistema cellulare di telefonia digitale Nord-Americano (NADC IS54) s'impone un limite alquanto stringente sulla potenza del rumore di fase per unità di banda: -115 dBc/Hz ad una frequenza offset di 60 kHz.

La crescita esponenziale che sta riguardando il mondo delle telecomunicazioni solleva la domanda per la disponibilità di un numero di canali sempre maggiore. Questa esigenza impone, di conseguenza, limiti sempre più stringenti per le

prestazioni degli oscillatori utilizzati appunto in tali sistemi di comunicazione. Una situazione simile a quella descritta occorre nei sistemi di “active-echo-location” ad effetto doppler. I segnali d’interferenza, dovuti alla riflessione da parte di ostacoli purtroppo presenti, possono mascherare con le proprie bande laterali, dovute al rumore di fase dell’illuminatore, il debole segnale doppler riflesso dal target mobile.

Anche nei sistemi di comunicazione con modulazioni di tipo QAM o PSK il rumore di fase è la principale causa dell’incremento del BER. Si consideri, infatti, la figura che mostra il pattern di segnali utilizzati da un modem 16-QAM capace di trasmettere 9600 bps su un canale con una capacità di trasmissione di 2400 baud: il modem utilizza 16 simboli, ognuno dei quali codifica una stringa di 4 bit. La costellazione dei segnali è rappresentata in figura 1.2 riportando le componenti I e Q, cioè le componenti in fase e in quadratura.



**Fig. 1.2 – Costellazione di segnali per un modem 16QAM**

Come è noto ad ogni simbolo è associata una regione di decisione. Il rumore di fase incide direttamente sulla fase del segnale e può determinare la fuoriuscita del simbolo dalla regione di decisione giusta. La misura del rumore di fase pone problemi particolari sia per la definizione dei parametri che ha senso considerare in relazione alla particolare applicazione che si sta considerando e agli effetti che può avere in quel contesto, sia per le metodologie da applicare al fine di ottenere le informazioni desiderate con bassi livelli d'incertezza.

### 1.3 Parametri che caratterizzano il rumore di fase

Sono stati definiti numerosi parametri per caratterizzare la stabilità di un clock o di un oscillatore nel dominio sia del tempo sia della frequenza. Per caratterizzare il rumore di fase intrinseco di oscillatori, di sintetizzatori di frequenza, di componenti elettronici come filtri, divisori e moltiplicatori di frequenza, amplificatori ecc, si opera solitamente nel dominio della frequenza. In questi casi si è interessati principalmente alle proprietà di stabilità del sistema su breve scala temporale e praticamente si trascura la presenza di eventuali fenomeni di deriva. Per descrivere le fluttuazioni della fase di una portante operando nel dominio della frequenza si misura la densità spettrale di potenza delle deviazioni indesiderate di fase. In effetti si possono considerare indifferentemente o il segnale che rappresenta le deviazioni della frequenza  $\Delta\nu(t)$  oppure quello che descrive le deviazioni di fase  $\Delta\Phi(t)$ .

Infatti, come è noto, sussiste il seguente semplice legame:

$$\Delta\nu(t) = \nu(t) - \nu_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \Phi(t)$$

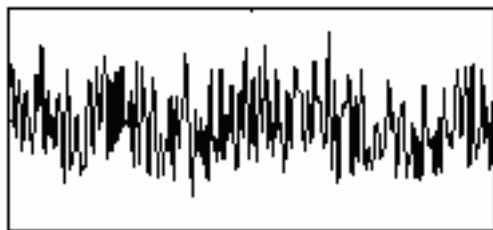
dove  $\Delta\nu(t)$  è la frequenza istantanea della portante e  $\nu_0$  esprime la frequenza media risultando quindi comprensiva anche di un eventuale offset di frequenza.

Dette  $S_{\Delta\nu}(f)$  e  $S_{\Delta\Phi}(f)$  le densità spettrali per le fluttuazioni della frequenza e della fase può scriversi:

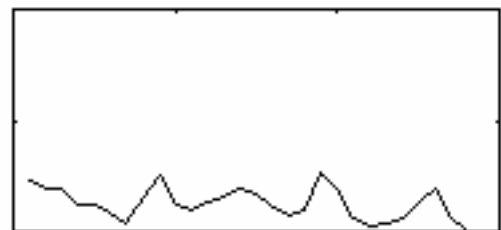
$$S_{\Delta\nu}(f) = f^2 S_{\Delta\Phi}(f)$$

La  $f$  in tale relazione ha il significato di frequenza di Fourier ed è talvolta riferita come frequenza offset o frequenza banda base.

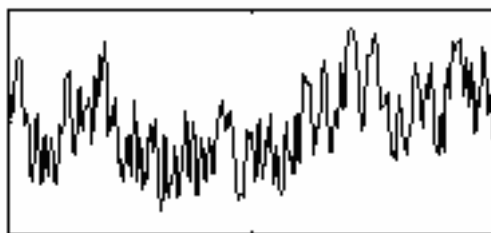
La densità spettrale di potenza delle deviazioni di fase o di frequenza prodotte da un oscillatore generalmente può essere rappresentata analiticamente da una combinazione lineare di termini corrispondenti a processi di tipo Power-Law e quindi da un processo Composite-Power-Law.



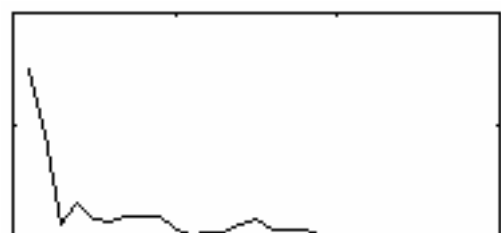
Rumore bianco



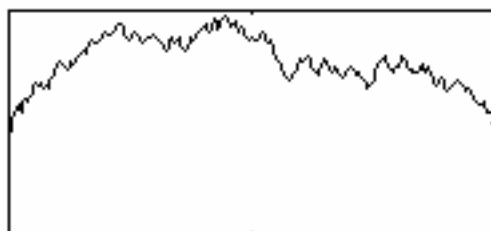
PSD rumore bianco ( $f^0$ )



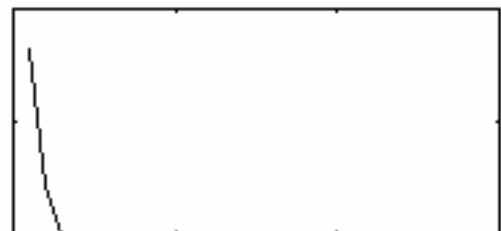
Rumore "flicker"



PSD rumore "flicker" ( $f^{-1}$ )



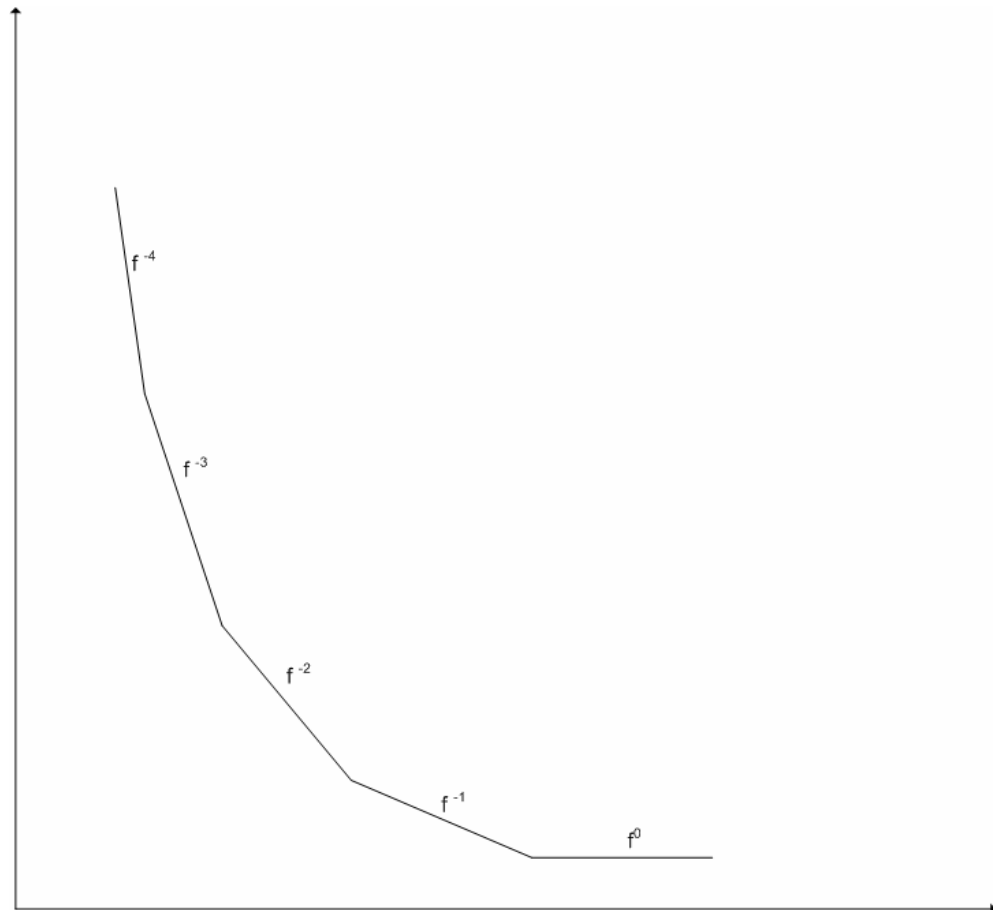
Random walk



PSD random walk ( $f^{-2}$ )



Inoltre in determinate bande un particolare termine risulta spesso predominante sugli altri; in un grafico su scala logaritmica lo spettro presenta pertanto in tali bande diverse pendenze (fig. 1.3).



**Fig. 1.3 – Spettro di tipo “Composite-Law”**

Per il progettista di un oscillatore i dati relativi al diagramma dello spettro forniscono le direttive per modificare i parametri di progetto del sistema in modo da ridurre il rumore in determinate bande.

Le Power-Law descrivono tipi di rumore etichettati in natura come:

- “white noise”:  $f^0$
- “flicker noise”:  $f^{-1}$
- “random walk noise”:  $f^{-2}$
- “flicker walk noise”:  $f^{-3}$
- “random run noise”:  $f^{-4}$

Il parametro più utilizzato per esprimere il rumore di fase nel dominio della frequenza è indicato con  $L(f)$ .

La definizione storica per  $L(f)$  vede tale parametro come rapporto tra la potenza contenuta in una banda di 1 Hz ad una frequenza offset pari a  $f$  rispetto alla portante, presente per effetto del rumore di fase, e la potenza complessiva della portante.

$$L(f) = \frac{P_{ssb}}{P_s}$$

Normalmente tale rapporto è espresso in dBc/Hz, decibel relativi alla portante (carrier) per unità d'ampiezza di banda (Fig. 1.6).

Nel'ambito di validità di opportune ipotesi, è possibile individuare un semplice legame tra  $L(f)$  e lo spettro a radiofrequenza osservato su un analizzatore. Si consideri all'uopo una oscillazione sinusoidale  $v(t)$  e un disturbo di tipo sinusoidale  $\Phi \cdot \sin(2\pi v_m t)$  che modula la fase introducendo delle deviazioni con un valore di picco molto piccolo ( $\Phi \ll 1$  rad).

Si può dimostrare, calcolando lo spettro del segnale risultante e considerando l'approssimazione per argomenti molto piccoli per le funzioni di Bessel che:

$$\frac{V_{ssb}}{V_s} \cong \frac{1}{2} \Phi$$

dove  $V_s$  è l'ampiezza di  $v(t)$  e  $V_{ssb}$  è l'ampiezza della riga spettrale più vicina alla portante, l'unica che rientra nella banda di Carson. La relazione data, osservando che la potenza di una sinusoide modulata in fase coincide con la potenza della portante si traduce immediatamente in:

$$L(f) = \frac{P_{ssb}}{P_s} \cong \frac{1}{2} S_\varphi(f) = \frac{1}{2f^2} S_{\Delta v}(f)$$

La definizione storica per il rapporto  $L(f)$  non è però consistente con tale relazione nel caso in cui lo scostamento della fase eccede piccoli valori. Lo standard IEEE 1139 ha pertanto modificato recentemente la definizione di  $L(f)$  per eliminare confusione, decretando che:

$$L(f) = \frac{1}{2} S_\varphi(f)$$

Ovviamente il parametro può essere interpretato come rapporto di potenze, sulla scia della prima definizione, se le fluttuazioni della fase dovute al rumore sono molto piccole.

In talune applicazioni si richiede di valutare il rumore di fase in una determinata banda attraverso un parametro globale (Fig. 1.7). Appartengono a tale categoria parametri che esprimono la cosiddetta modulazione FM o PM residua definiti come:

$$\text{Residual FM} \quad v_{rms} = \sqrt{\int_{f_{inf}}^{f_{sup}} S_{\Delta v}(f) df} \quad [\text{Hz}]$$

$$\text{Residual AM} \quad \phi_{rms} = \sqrt{\int_{f_{inf}}^{f_{sup}} S_{\phi}(f) df} \quad [\text{Hz}]$$

In tal caso le informazioni riguardanti la distribuzione di potenza in tale banda si perdono; inoltre, da tali parametri non è possibile individuare la presenza di disturbi spuri che possono aumentare notevolmente il valore misurato.

#### 1.4 Metodo per l'elaborazione digitale del segnale

Il metodo proposto consente di ottenere il segnale “rumore di fase” dal segnale portante, ed è particolarmente indicato per implementazioni su DSP, in quanto non richiede grandi capacità di memoria, e può essere usato con un'ampia gamma di frequenze, che vanno dalle frazioni di Hz fino alla massima frequenza di campionamento del sistema di acquisizione dati adottato, compatibilmente con il tempo speso per l'elaborazione.

Supponiamo di avere un segnale sinusoidale portante, descritto dalla seguente relazione:

$$s(t) = A \sin(2\pi f_s t + \varphi(t) + \varphi_0)$$

La frequenza nominale di tale tono portante è pari ad un valore  $f_0$ , tuttavia è stata indicata con un valore diverso  $f_s$ , dovuto all'incertezza sul valore di frequenza con

cui il sistema di generazione del segnale produce tale tono, e ad altri fenomeni parassiti che possono innestarsi a monte della ricezione del segnale portante.

Tale segnale viene campionato con una frequenza pari a  $f_c$ , ottenendo:

$$s(nT_c) = A \sin(2\pi f_s nT_c + \varphi(nT_c) + \varphi_0)$$

Nel seguito si useranno le relazioni nel tempo continuo, essendo perfettamente equivalenti a quelle nel tempo discreto, sostituendo a  $t$  l'espressione  $nT_c$ . La sequenza numerica di campioni così ottenuta viene elaborata secondo il seguente schema:

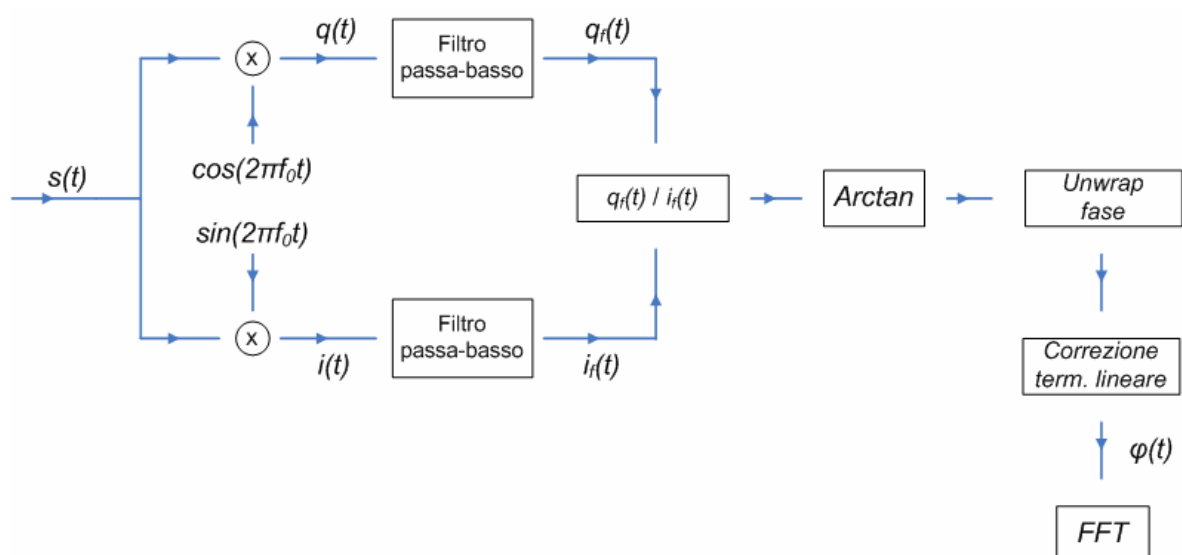


Fig. 1.4 – Schema di demodulazione I/Q

Il segnale  $s(t)$  viene moltiplicato per due toni in quadratura:

$$q(t) = s(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} [\sin(2\pi(f_s + f_0)t + \varphi(t) + \varphi_0) + \sin(2\pi(f_s - f_0)t + \varphi(t) + \varphi_0)]$$

$$i(t) = s(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} [\cos(2\pi(f_s - f_0)t + \varphi(t) + \varphi_0) - \cos(2\pi(f_s + f_0)t + \varphi(t) + \varphi_0)]$$

Filtrando le due componenti con un filtro passa-basso, eliminiamo le componenti a frequenza  $f_s + f_0$ :

$$q_f(t) = \frac{A}{2} \sin(2\pi(f_s - f_0)t + \varphi(t) + \varphi_0)$$

$$i_f(t) = \frac{A}{2} \cos(2\pi(f_s - f_0)t + \varphi(t) + \varphi_0)$$

Operando un rapporto tra queste due componenti, e una successiva arcotangente, otteniamo:

$$\Phi(t) = 2\pi(f_s - f_0)t + \varphi(t) + \varphi_0$$

E' interessante notare che, in teoria, eventuali modulazioni di ampiezza non alterano l'argomento della tangente, rendendo il metodo insensibile a tali disturbi.

Per ottenere il segnale  $\varphi(t)$  contenente il rumore di fase, vanno effettuate preliminarmente un'operazione di unwrap, la quale corregge i salti di fase dovuti al codominio finito della funzione arcotangente, e una stima del fattore lineare che affligge il segnale  $\Phi(t)$ , la quale permette di rimuoverlo.

Una volta ottenuto il segnale  $\varphi(t)$ , è possibile analizzarne il contenuto spettrale tramite l'uso della FFT. Nel capitolo 5, verranno illustrati i metodi di analisi spettrale utilizzati.