

# 5

## **Analisi spettrale del rumore di fase**

In questo capitolo verranno illustrati i due metodi di analisi spettrale utilizzati per valutare la potenza del rumore da cui è affetta la portante sinusoidale. Come già detto in precedenza, entrambi fanno uso della routine Radix 2 FFT implementata dalla Analog Devices. La scelta di operare su 1024 punti per quanto riguarda la FFT è stata dettata da motivi di spazio disponibile in memoria, e tale scelta si è riflessa sulle dimensioni dei vettori degli stadi a monte. Difatti, la routine FFT, per il calcolo dello spettro complesso, utilizza:

- 2 vettori di 1024 punti per la parte reale e immaginaria dello spettro;
- 2 vettori di 1024 punti per appoggio temporaneo dei dati durante l'elaborazione "a farfalla";
- 2 vettori di 512 punti per memorizzare i "twiddle factors" necessari al calcolo.

A valle della FFT viene calcolato il periodogramma del rumore di fase, operando il modulo quadro dei campioni complessi della FFT, opportunamente scalati a seconda dell'analisi spettrale realizzata. Il risultato viene memorizzato sovrascrivendo il vettore che contiene la parte reale dei campioni della FFT, del quale solo la prima metà viene trasferita al dispositivo di visualizzazione (nel nostro caso la memoria esterna), in quanto la seconda metà contiene lo spettro riflesso.

## 5.1 Analisi mediante decimazione del rumore di fase

Le due operazioni fondamentali che permettono di modificare numericamente la frequenza di campionamento sono: l'interpolazione che aumenta la frequenza di campionamento e la decimazione che la riduce, comprimendo di fatto i dati. Naturalmente, questi obiettivi devono essere ottenuti senza introdurre effetti indesiderati come errori di quantizzazione o aliasing.

La decimazione ( $\downarrow M$ ) per un fattore  $M$  è ottenuta tramite il sistema definito dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(n) = x(Mn)$$

Tale sistema è chiaramente lineare, ma non tempo invariante. Il segnale di ingresso può essere perfettamente ricostruito dal segnale di uscita solo se si evita il fenomeno dell'aliasing, e cioè se il limite di banda del segnale di ingresso è inferiore a  $\pi/M$ . Affinché, quindi, l'operazione di decimazione non comporti perdita di informazione rispetto al segnale di ingresso, tale operazione dovrà essere preceduta da un filtraggio mediante un filtro passa-basso con frequenza di taglio  $\pi/M$ .

Sappiamo che i campioni di fase prodotti fino a questo stadio hanno una frequenza di campionamento pari a  $f_c$ , e quindi una risoluzione in frequenza pari a  $\Delta f = \frac{f_c}{N}$ . Questo significa che, a parità di punti acquisiti, andando a diminuire la frequenza di campionamento  $f_c$ , si riesce a migliorare la risoluzione in frequenza dell'analisi spettrale, a scapito ovviamente della banda analizzabile, la quale è comunque limitata dalla frequenza di taglio del filtro numerico passa basso adottato.

La procedura di decimazione è interamente affidata ad una MSF a 7 stati, la quale decide ad ogni passo quale decimazione e FFT effettuare. In figura 5.1 viene riportato il diagramma di stato della MSF. Durante l'evoluzione di tale macchina, vengono utilizzati quattro registri: *input\_r*, che contiene di volta in volta il segmento di rumore di fase da analizzare, e tre registri temporanei, che accolgono le medie effettuate sui punti di *input\_r* tra uno stato e l'altro. La MSF, oltre a semplificare la

progettazione del codice destinato alla decimazione, permette di ridurre le dimensioni dei tre registri temporanei al minimo indispensabile, in quanto, tra uno e stato e l'altro, vengono "riciclati" nel loro uso, evitando di definirne altri o di aumentare la dimensione dei tre già definiti.

Nello schema sono state indicate, con le sigle *FFT*, *FFT 8*, *FFT 64* e *FFT 512*, le trasformate di Fourier eseguite rispettivamente sui punti reali, su quelli decimati mediando su 8, su 64 e su 512 punti del rumore di fase. I passi colorati in blu vengono eseguiti prima di quelli in nero, e rappresentano l'esecuzione di una FFT, nonché lo spostamento dei dati tra i registri temporanei per poter continuare con le decimazioni con fattore più alto. Ogni 1024 punti viene eseguito uno ed un solo stato di tale macchina. A valle della FFT, sui registri *input\_r* e *input\_i*, contenenti la parte reale e immaginaria viene effettuato il modulo quadro, compensato per la finestra utilizzata durante l'analisi spettrale.

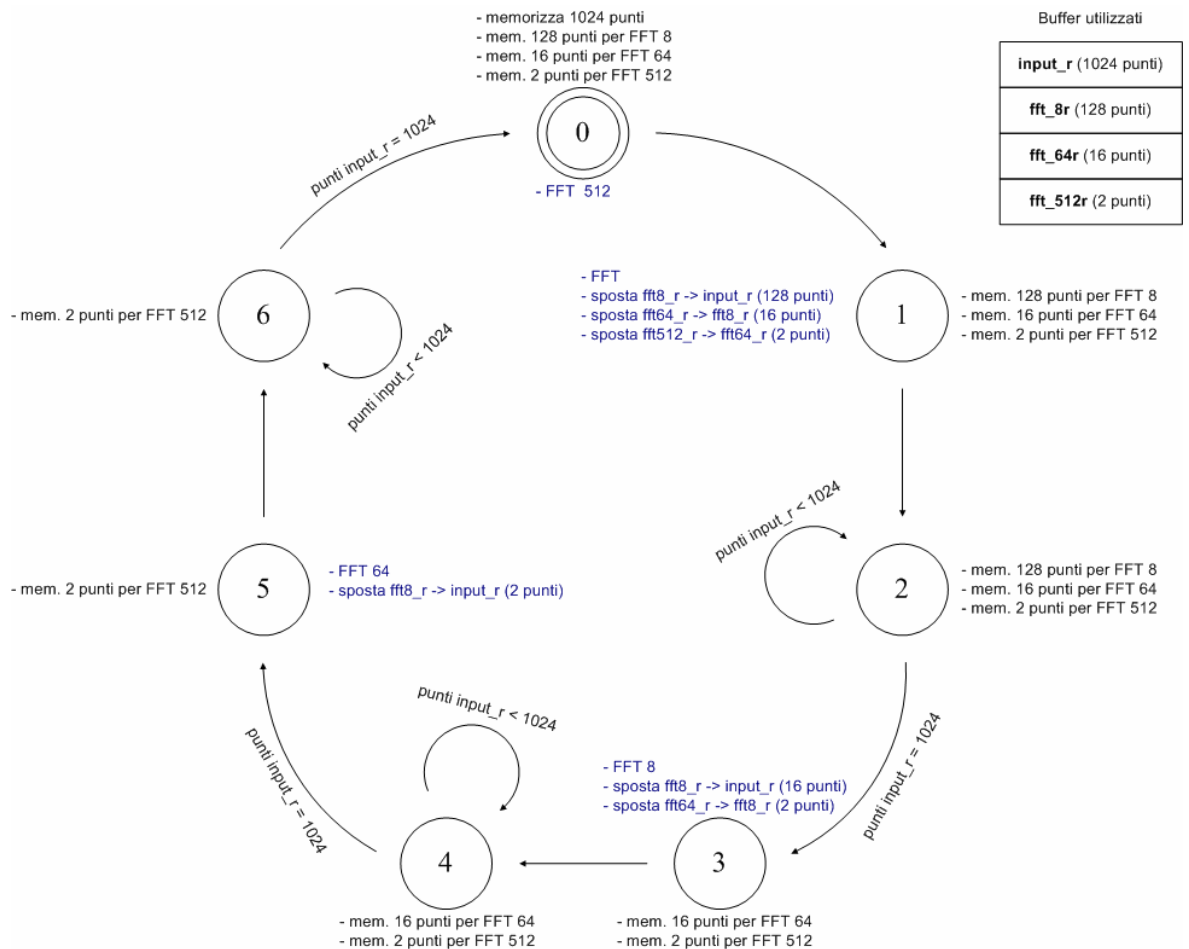


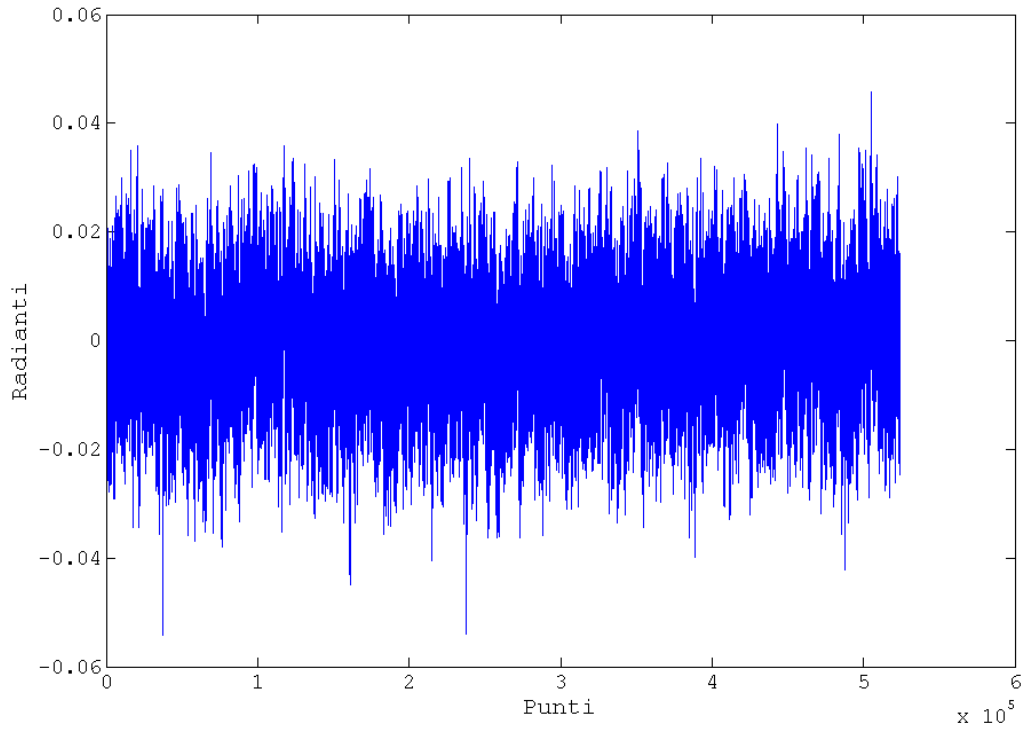
Fig. 5.1 – Diagramma di stato della MSF per le decimazioni

Lo stato iniziale è lo stato 0, dove viene già effettuata una FFT 512, la quale verrà scartata in fase di visualizzazione, in quanto non significativa. Una volta trasferiti i campioni di fase in *input\_r* e calcolate tutte le medie, si passa allo stato 1, il quale sarà eseguito dopo l'elaborazione dei successivi 1024 punti. Durante l'esecuzione dello stato 1, vengono eseguiti i passi in blu, ovvero la FFT sui punti reali, e la memorizzazione del periodogramma in memoria esterna. Poiché *input\_r* può essere a questo punto riutilizzato, tutte le informazioni contenute nei registri temporanei vengono "scalate" verso il vettore immediatamente più capiente. I punti di fase possono essere a questo punto mediati per 8, 64 e 512, e memorizzati rispettivamente in *input\_r*, *fft\_8r* e *fft\_64r*. Nello stato 2, eseguito sui successivi 1024 punti, vengono unicamente eseguite le medie, fino al riempimento di *input\_r*, che permetterà il passaggio allo stato 3, nel quale verrà effettuata la FFT 8.

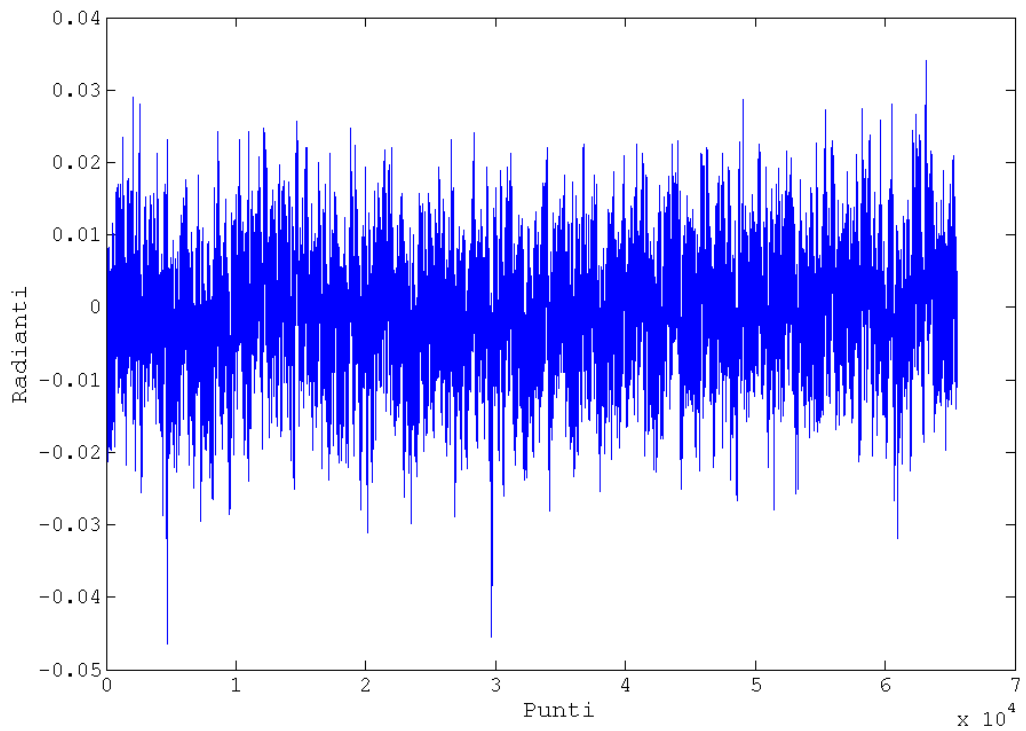
E' evidente il forte vantaggio offerto dalla MSF: le dimensioni dei vettori temporanei sono ridotte a quelle minime, e la scelta delle decimazioni da effettuare durante l'elaborazione viene gestita correttamente ad ogni passo, senza avere un aggravio computazionale. E' anche banale osservare che la transizione più pesante di tutta la macchina è rappresentata dal passaggio stato 0-1. Al passaggio dallo stato 6 allo stato 0 viene realizzata la prima FFT 512 utile, essendo stata scartata quella iniziale, e l'elaborazione per decimazione può riprendere.

L'analisi per decimazione offre il vantaggio di poter analizzare con risoluzioni via via migliori man mano che ci si avvicina all'asse delle frequenze; tuttavia, per la produzione di tutte le FFT, ha bisogno di 524288 punti, ovvero ogni risultato viene prodotto in maniera completa solo dopo un secondo, supponendo di lavorare alla massima frequenza di 500kS/s. L'analisi WOSA presentata successivamente invece non offre risoluzioni variabili, ma ha la capacità di presentare analisi spettrali ad ogni segmento di fase da 1024 punti elaborato.

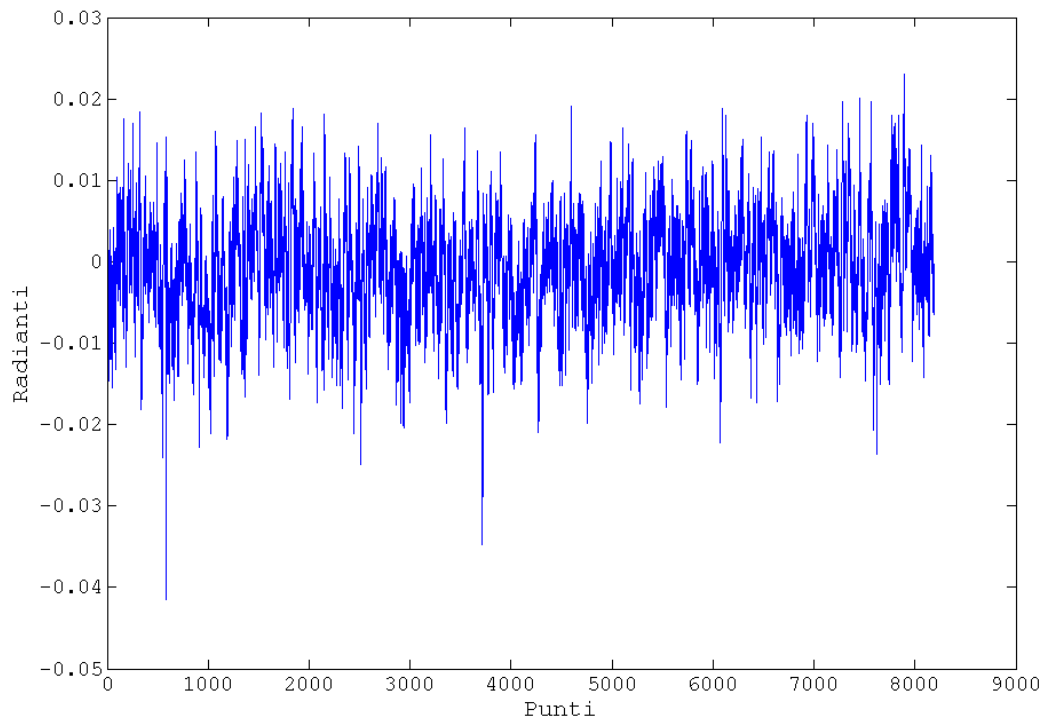
In figura 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 viene riportato l'effetto delle medie nel tempo sul rumore di fase; in figura 5.6, 5.7 e 5.8 vengono riportate le risposte dei filtri "media" che intervengono durante la decimazione.



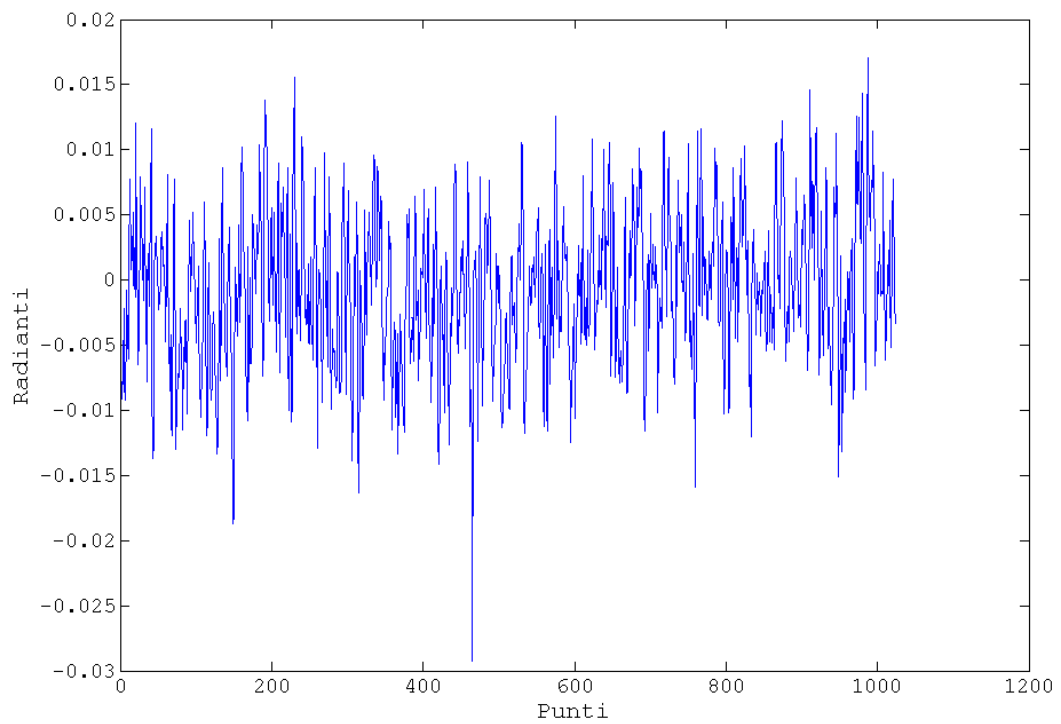
**Fig. 5.2 – Rumore di fase non decimato**



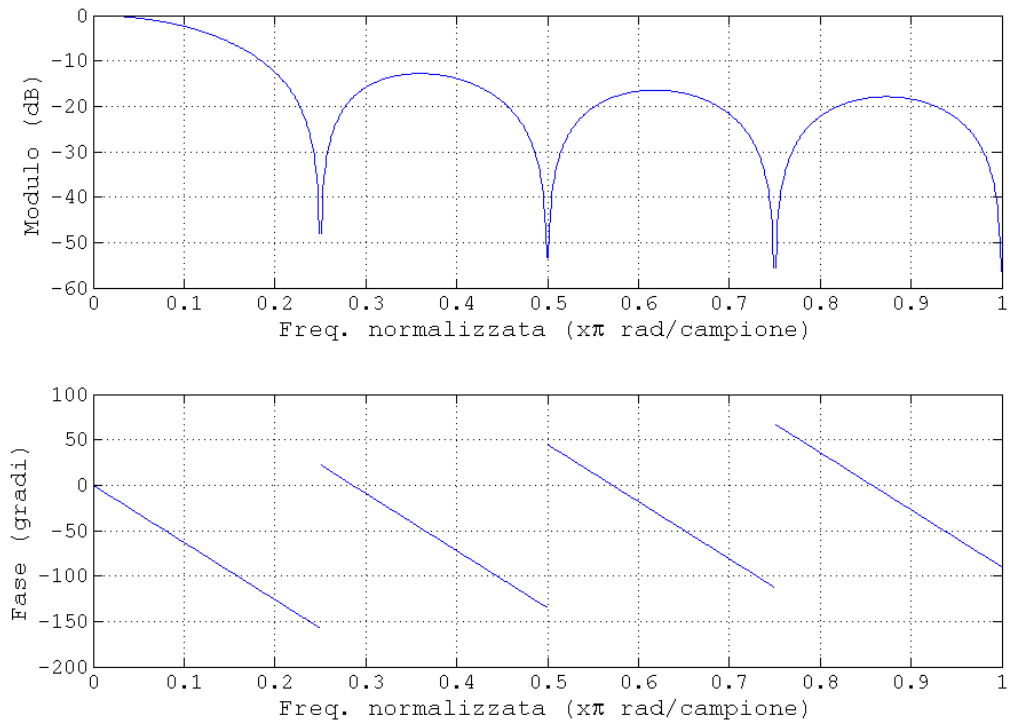
**Fig. 5.3 – Rumore di fase decimato su 8 punti**



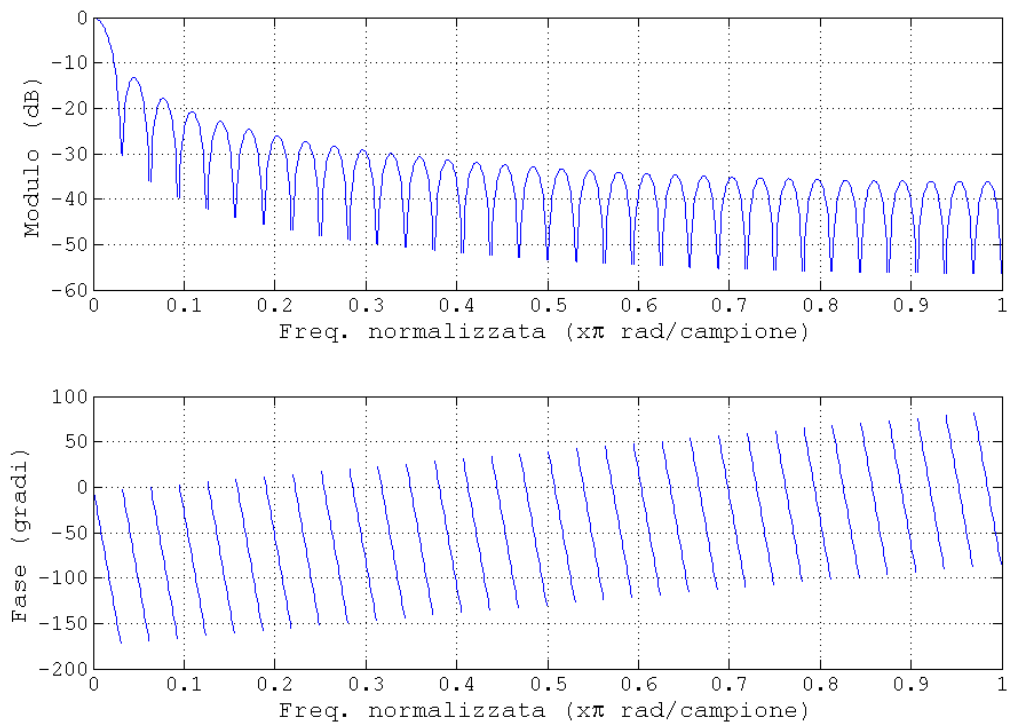
**Fig. 5.4 – Rumore di fase decimato su 64 punti**



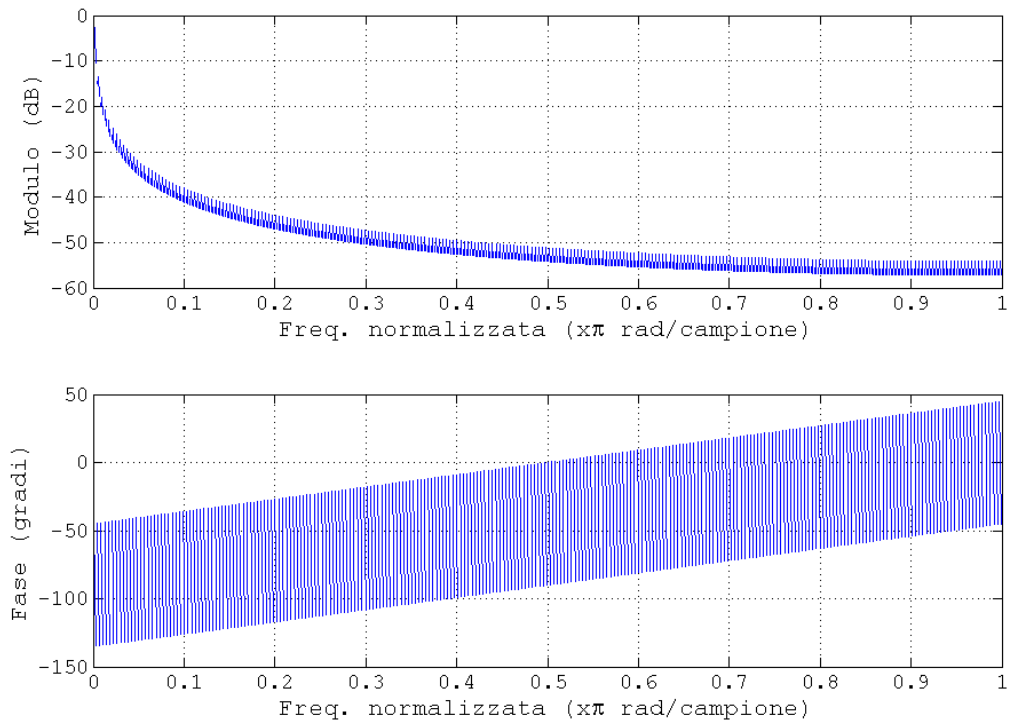
**Fig. 5.5 – Rumore di fase decimato su 512 punti**



**Fig. 5.6 – Risposta in frequenza del filtro media su 8 punti**



**Fig. 5.7 – Risposta in frequenza del filtro media su 64 punti**

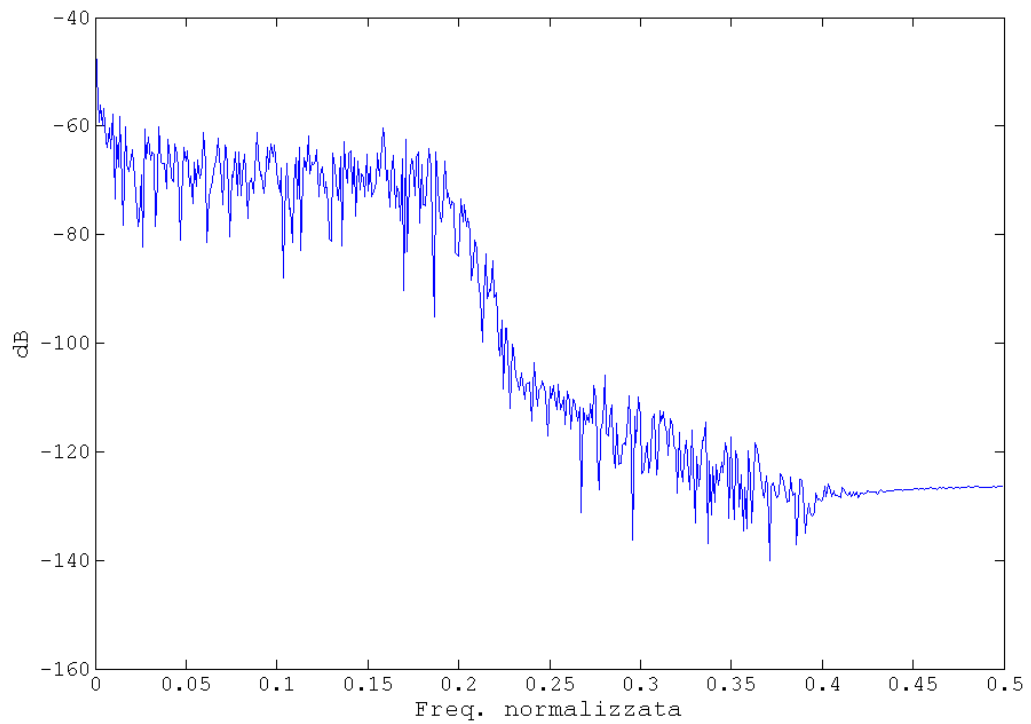


**Fig. 5.8 – Risposta in frequenza del filtro media su 512 punti**

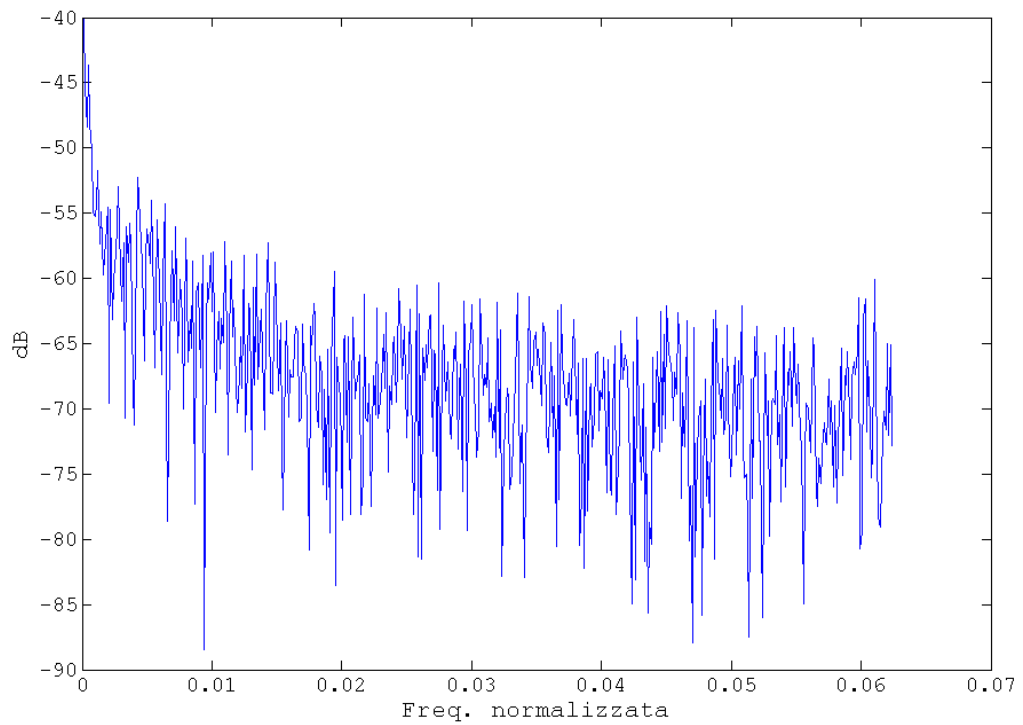
Le risposte ottenute nei vari stadi possono essere composte tra loro, utilizzando ogni spettro nella banda dove offre la migliore risoluzione, ovvero, in termini di frequenza normalizzata:

- lo spettro del segnale reale, tra  $1/16$  e  $1/2$ ;
- lo spettro del segnale decimato su 8 punti, tra  $1/128$  e  $1/16$ ;
- lo spettro del segnale decimato su 64 punti, tra  $1/1024$  e  $1/128$ ;
- lo spettro del segnale decimato su 512 punti, tra 0 e  $1/1024$ .

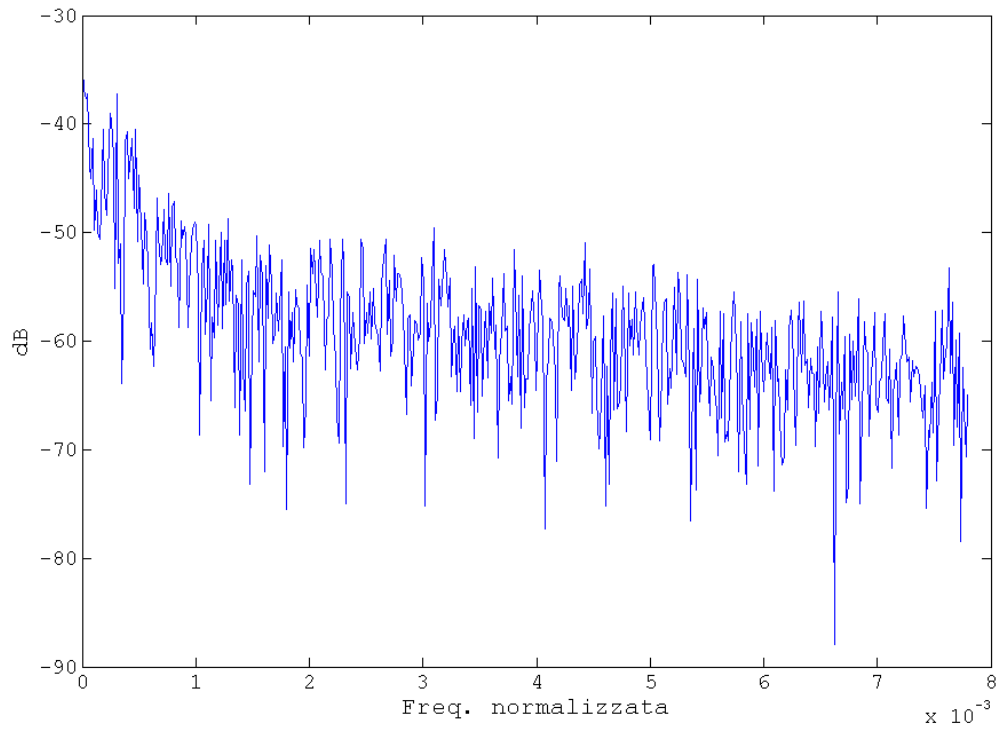
Le figure 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 riportano gli spettri ottenuti alle varie decimazioni. Le figure 5.13 e 5.14 riportano invece la composizione di tali spettri, ognuno inserito nella banda dove fornisce più informazione.



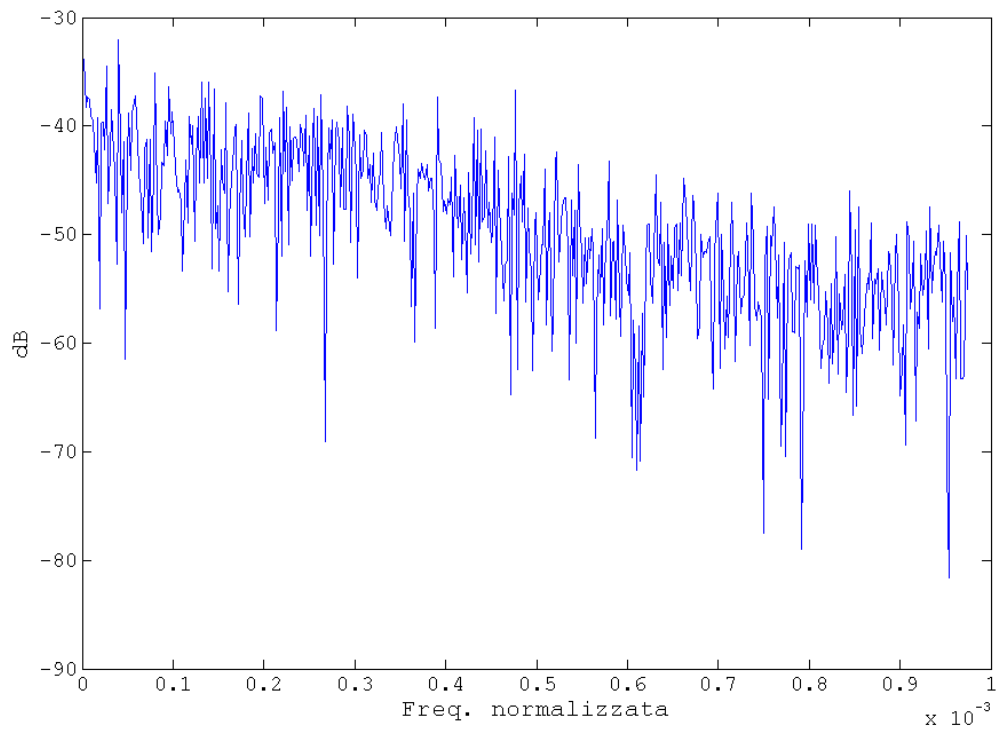
**Fig. 5.9 – Periodogramma del rumore di fase in tempo reale**



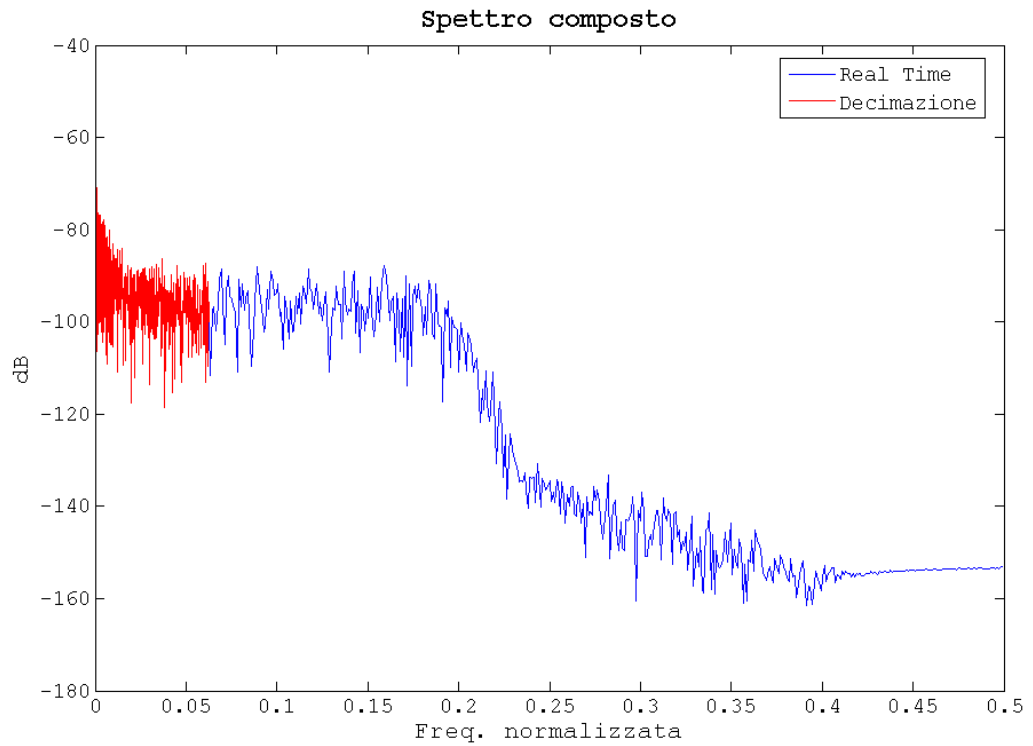
**Fig. 5.10 – Periodogramma del rumore di fase decimato su 8 punti**



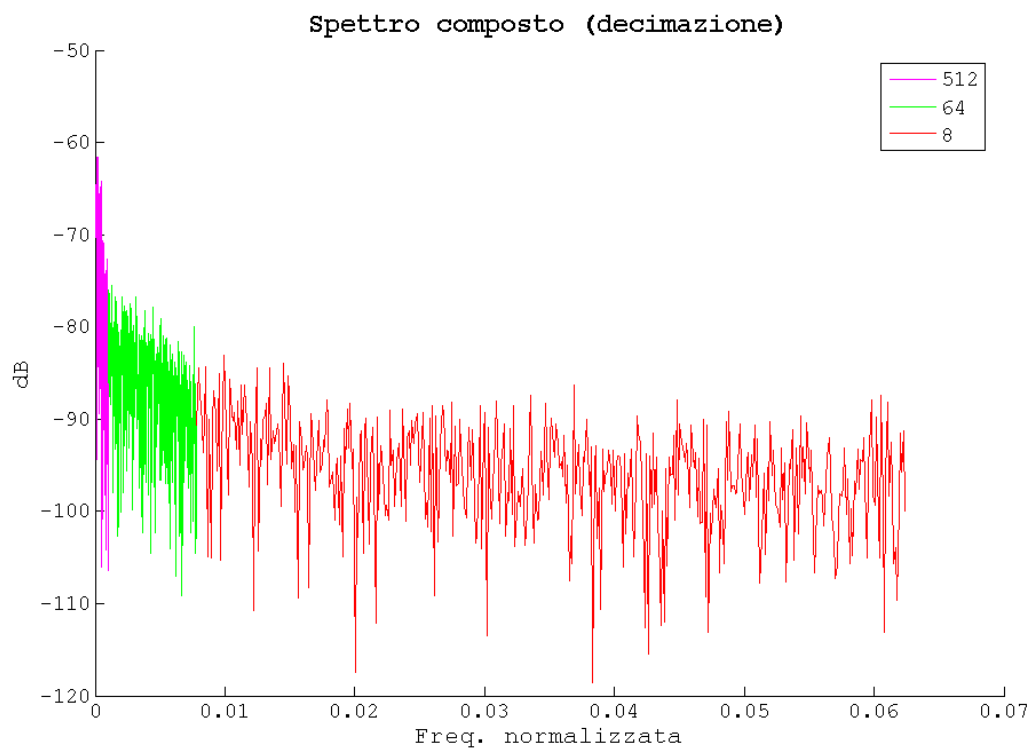
**Fig. 5.11 – Periodogramma del rumore di fase decimato su 64 punti**



**Fig. 5.12 – Periodogramma del rumore di fase decimato su 512 punti**



**Fig. 5.13 – Banda di interesse della decimazione**



**Fig. 5.14 – Banda di interesse della sola decimazione**

## 5.2 Analisi mediante metodo WOSA

L'esigenza dell'utilizzo del metodo WOSA (Weighted Overlapped Segment Averaging) nasce dal fatto di dover misurare segnali il cui spettro, a causa della loro natura "rumorosa", è diffuso lungo l'asse delle frequenze. Il metodo WOSA, mediando gli spettri nel tempo, permette di ottenere una sufficiente accuratezza di misura senza appesantire il tempo d'elaborazione. In particolare, è stato implementato il metodo Welch dei periodogrammi mediati, chiamato anche stimatore WOSA. Tale metodo è uno dei più efficienti per la stima di PSD, in particolare per set di dati molto lunghi.

Il segnale di fase, già diviso in segmenti di 1024 punti, viene moltiplicato per una finestra per ridurre gli indesiderati effetti di dispersione spettrale, e sul segnale "finestrato", viene fatta una stima del periodogramma tramite la seguente relazione:

$$S_x^i(f) = \frac{T_s}{N_s U} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x^i(n) w(n) e^{-j2\pi f n T_s} \right|^2$$

dove  $U$  è la potenza della finestra utilizzata,  $N_s$  è il numero di punti,  $T_s$  è il periodo di campionamento,  $x^i(n)$  sono i campioni di fase e  $w(n)$  i campioni della finestra.

La stima della PSD  $S_x(f)$  è ottenuta mediando i periodogrammi:

$$S_x(f) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K S_x^i(f)$$

dove  $K$  è il numero di segmenti analizzati.

E' immediato osservare che la stima della PSD è influenzata dalla scelta della finestra e dal rapporto di sovrapposizione tra i segmenti, definito come

$r = 100 \cdot \frac{N_p}{N_s} \%$ , dove  $N_p$  rappresenta il numero di punti sovrapposti tra due

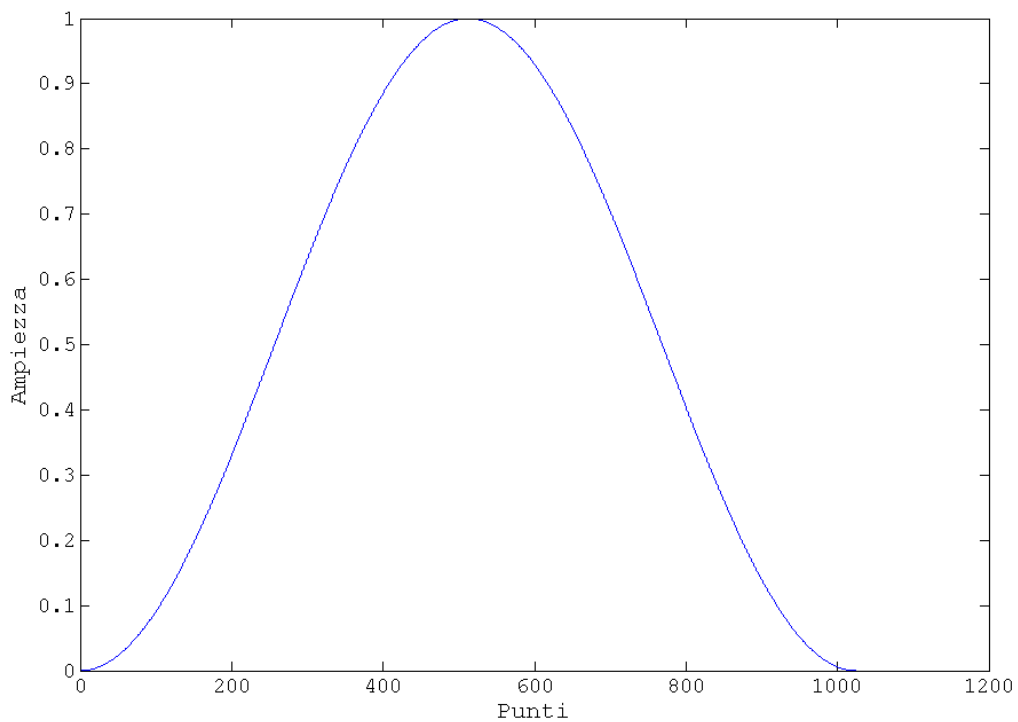
successivi segmenti.

Per semplicità di implementazione, tale rapporto è zero, quindi non sono previste sovrapposizioni. La scelta di un rapporto non nullo avrebbe comportato un drammatico aumento del consumo di memoria e del carico computazionale. La finestra scelta per l'elaborazione è la finestra di Hanning, definita dalla relazione:

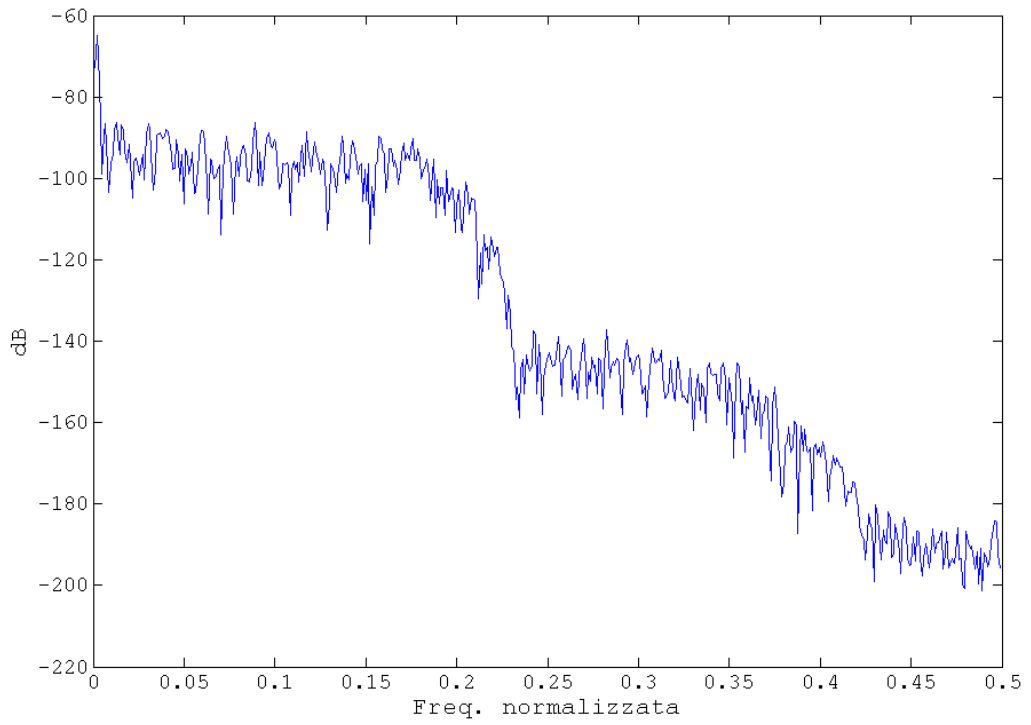
$$H(n) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right] \quad n = 1 \dots N$$

riportata in figura 5.15.

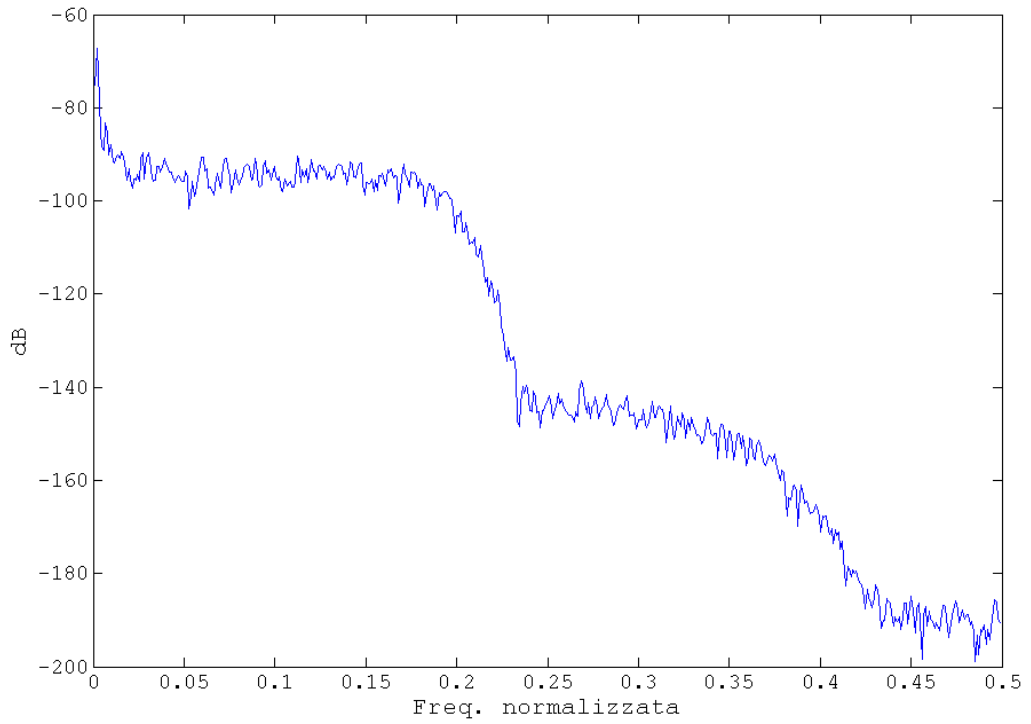
Ad ogni passo d'elaborazione, viene conservata solo la somma parziale dei periodogrammi, provvedendo di volta in volta a dividere per il numero di segmenti elaborati. Per comodità di rappresentazione, è stato scelto di visualizzare solo le stime PSD corrispondenti a  $K=1, 4, 8, 16, 64$  e  $512$ , mostrati nelle figure 5.16 e seguenti. In figura 5.22, viene mostrata la sovrapposizione delle PSD nel tempo, la quale dimostra come il metodo WOSA fornisca una misura fortemente convergente nel tempo.



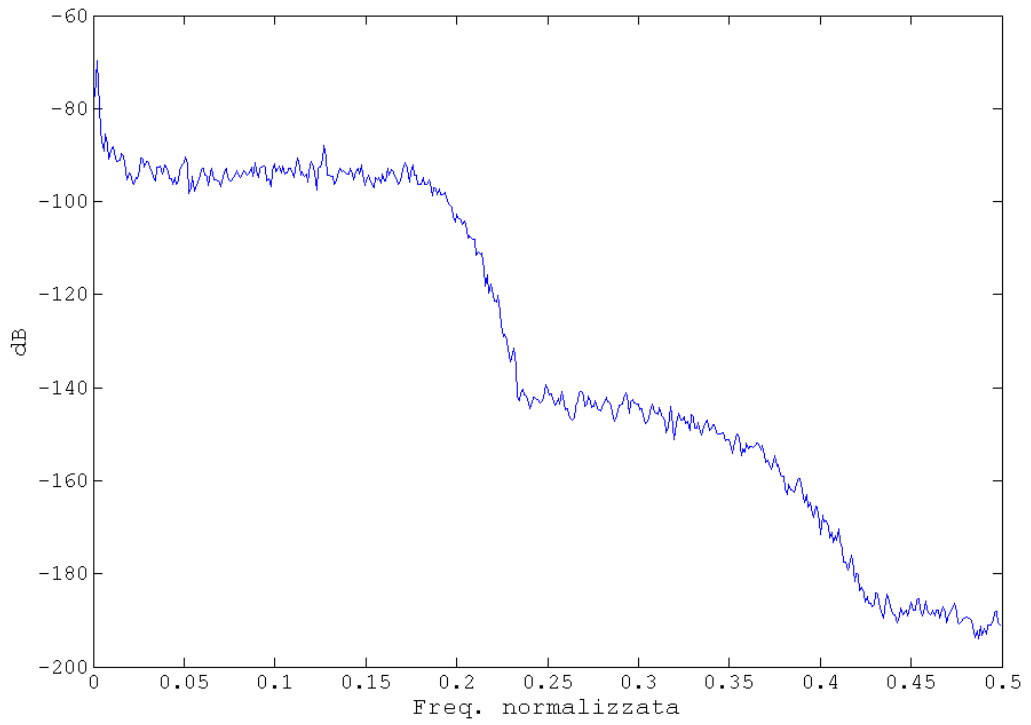
**Fig. 5.15 – Finestra di Hanning**



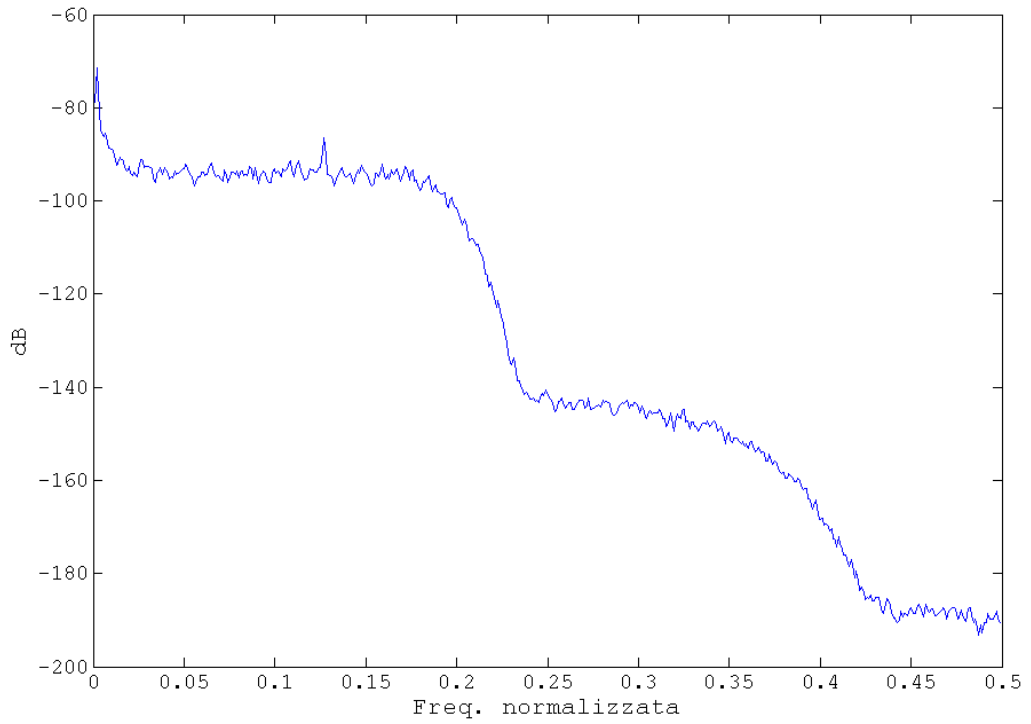
**Fig. 5.16 – WOSA su un periodogramma**



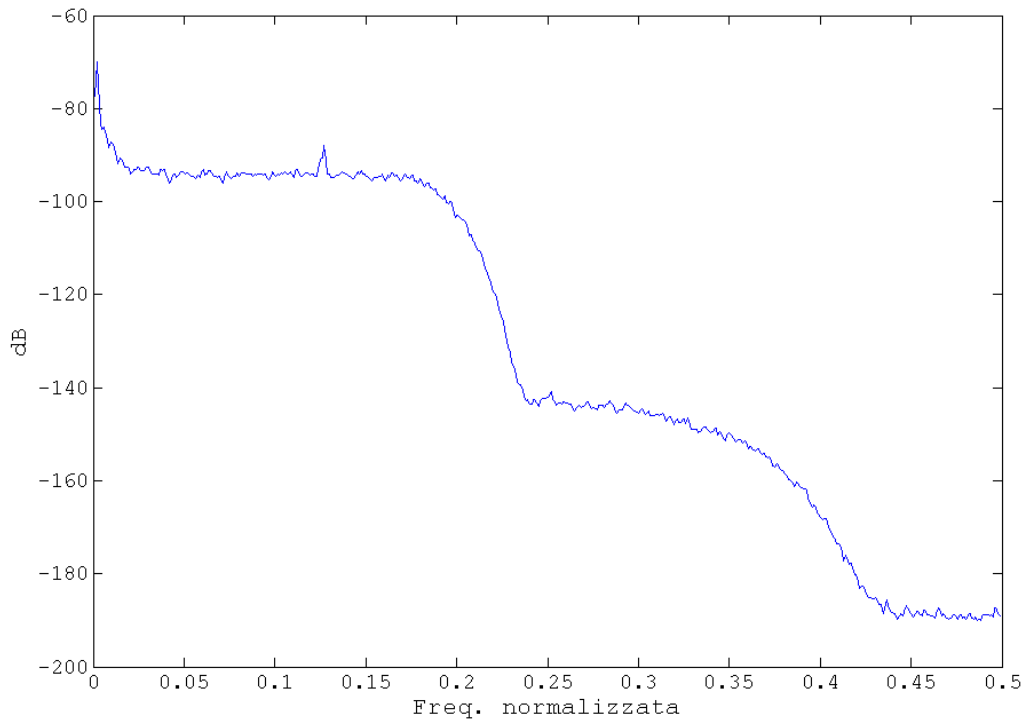
**Fig. 5.17 - WOSA su 4 periodogrammi**



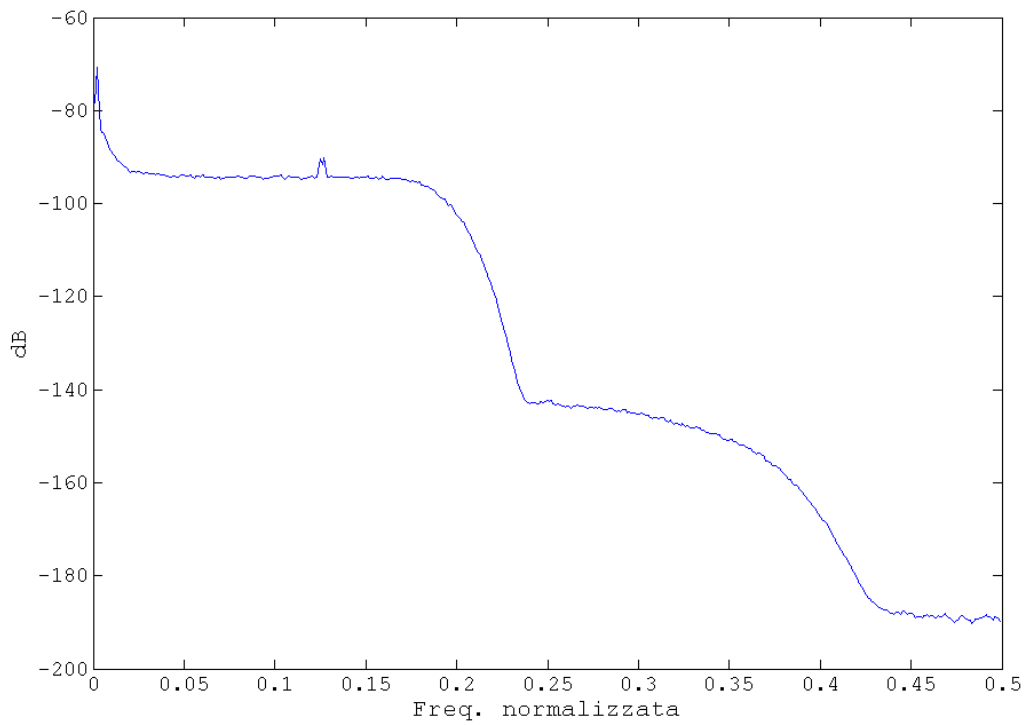
**Fig. 5.18 - WOSA su 8 periodogrammi**



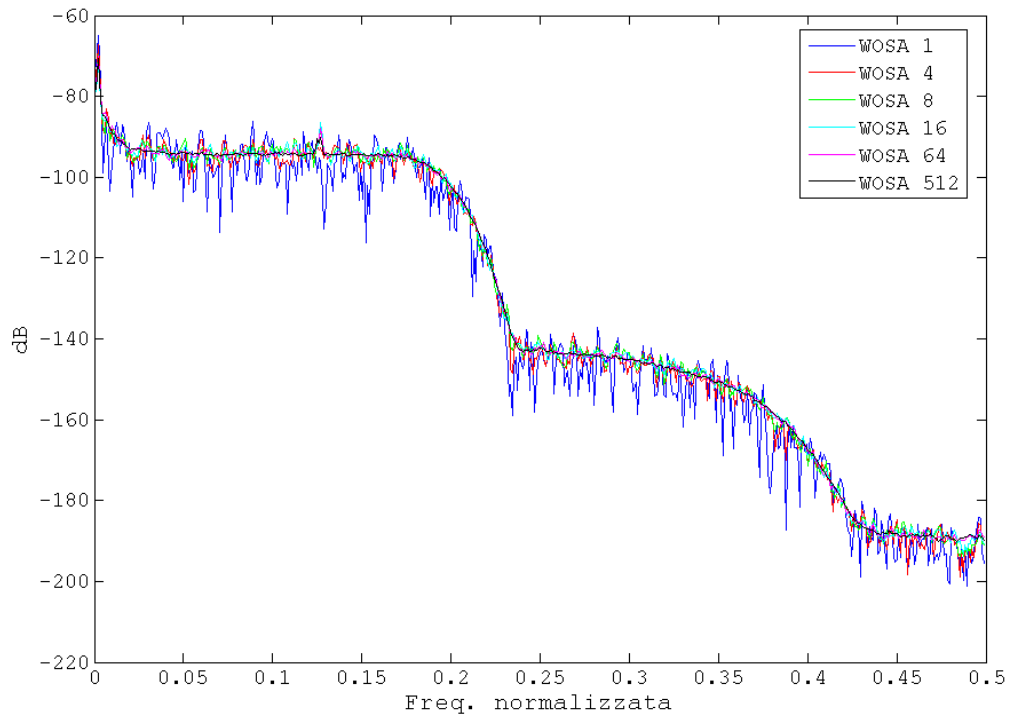
**Fig. 5.19 - WOSA su 16 periodogrammi**



**Fig. 5.20 - WOSA su 64 periodogrammi**



**Fig. 5.21 - WOSA su 512 periodogrammi**



**Fig. 5.22 – Sovrapposizione dei periodogrammi mediati nel tempo**